§ 7. ДВИЖЕНИЕ ГИРОСКОПА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Если пренебречь силами сопротивления среды, в которой движется гироскоп, и силами трения в закрепленной точке или соответственно в подшипниках рамок, то кроме силы реакции в закрепленной точке на гироскоп всегда действует сила его тяжести. Пусть в этом случае гироскоп, с которым скреплена система координат $Oxyz$ (ось Oz является осью симметрии гироскопа), движется относительно системы координат $Ox_1y_1z_1$, у которой ось Oz_1 с единичным вектором $\bar{k}_1$ направлена вертикально вверх (рис. 141).

Для силы тяжести $\bar{P}$, направленной вертикально вниз, т. е. против положительного направления оси Oz_1, имеем $\bar{P}=-P\bar{k}_1$. Ее проекции на подвижные оси координат, скрепленные с гироскопом, выразятся в виде

$$\left.\begin{aligned} P_x&=-P\cos(z_1,\hat{}\,x)=-P\gamma_1;\\ P_y&=-P\cos(z_1,\hat{}\,y)=-P\gamma_2;\\ P_z&=-P\cos(z_1,\hat{}\,z)=-P\gamma_3,\end{aligned}\right\}\tag{31}$$

где γ_1, γ_2, γ_3 — косинусы углов оси Oz_1 с осями координат подвижной системы $Oxyz$.

Главный момент внешних сил $\bar{L}_O^{(e)}$ относительно закрепленной точки сведется только к векторному моменту силы тяжести относительно этой точки. Поэтому, учитывая, что $x_C=0$, $y_C=0$, $z_C=l$, и используя (31), получим

$$\left.\begin{aligned} L_x^{(e)}&=M_x(\bar{P})=y_CP_z-z_CP_y=-z_CP_y=Pl\gamma_2;\\ L_y^{(e)}&=M_y(\bar{P})=z_CP_x-x_CP_z=z_CP_x=-Pl\gamma_1;\\ L_z^{(e)}&=M_z(\bar{P})=x_CP_y-y_CP_x=0.\end{aligned}\right\}\tag{32}$$

Динамические уравнения Эйлера для симметричного гироскопа ($J_x=J_y$), движущегося под действием силы тяжести, примут вид

$$\left.\begin{aligned} &J_x\frac{d\omega_x}{dt}+(J_z-J_x)\omega_y\omega_z=Pl\gamma_2;\\ &J_y\frac{d\omega_y}{dt}+(J_x-J_z)\omega_z\omega_x=-Pl\gamma_1;\\ &J_z\frac{d\omega_z}{dt}=0.\end{aligned}\right\}\tag{33}$$

К динамическим уравнениям следует присоединить кинематические уравнения Эйлера

$$\left.\begin{aligned} \omega_x&=\dot\psi\sin\theta\sin\varphi+\dot\theta\cos\varphi;\\ \omega_y&=\dot\psi\cos\theta\cos\varphi-\dot\theta\sin\varphi;\\ \omega_z&=\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi.\end{aligned}\right\}\tag{34}$$

К системе уравнений (33) и (34) надо добавить формулы (18), выражающие косинусы углов γ_1, γ_2, γ_3 через углы Эйлера:

$$\gamma_1=\sin\theta\sin\varphi;\quad \gamma_2=\sin\theta\cos\varphi;\quad \gamma_3=\cos\theta.\tag{35}$$

Систему уравнений (33) и (34) с учетом (35) проинтегрируем в наиболее важном частном случае начальных условий:

$$t=0;\quad \omega_x=\omega_y=0;\quad \omega_z=\omega_0;\quad \varphi=\psi=0;\quad \theta=\theta_0.\tag{36}$$

Вместо динамических уравнений Эйлера (33) целесообразно использовать первые интегралы этих уравнений, которые можно получить из самих уравнений или из общих теорем динамики, примененных к гироскопу. Один из этих интегралов следует из последнего уравнения системы (33):

$$\omega_z=\text{const}=C_1.$$

Два других первых интеграла получим применением общих теорем динамики.

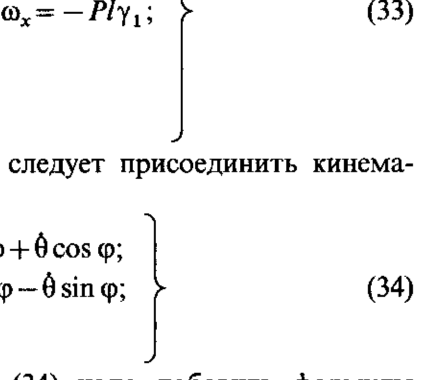

Рис. 141

Связи, наложенные на гироскоп, при отсутствии трения в закрепленной точке являются идеальными и стационарными. Сила тяжести, действующая на него, является потенциальной. При этих условиях справедлив закон сохранения механической энергии (интеграл энергии)

$$T+\Pi=\text{const}=C_2'.$$

Кинетическая энергия гироскопа при $J_x=J_y$ вычисляется по формуле

$$T=J_x\frac{\omega_x^2+\omega_y^2}{2}+J_z\frac{\omega_z^2}{2}.$$

Потенциальная энергия Π, если принять ее равной нулю, когда центр масс находится в горизонтальной плоскости Ox_1y_1, определяется через координату центра масс z_{1C} в неподвижной системе координат выражением:

$$\Pi=Pz_{1C}.$$

Значение z_{1C} получим проецированием радиуса-вектора центра масс $\bar{r}_C=l\bar{k}$, направленного по подвижной оси Oz, на неподвижную ось Oz_1. Имеем

$$z_{1C}=r_C\cos(z_1,\hat{}\,z)=l\gamma_3.$$

Таким образом,

$$\Pi=Pz_{1C}=Pl\gamma_3.$$

Подставляя значения кинетической и потенциальной энергий в интеграл энергии, получим

$$J_x(\omega_x^2+\omega_y^2)+J_z\omega_z^2+2Pl\gamma_3=C_2.$$

Из теоремы об изменении кинетического момента в абсолютном движении гироскопа относительно неподвижной оси Oz_1 имеем

$$dK_{z_1}/dt=L_{z_1}^{(e)}=0,$$

так как сила тяжести $\bar{P}$ параллельна этой оси. Отсюда получаем следующий интеграл сохранения кинетического момента относительно оси Oz_1:

$$K_{z_1}=\text{const}=C_3.$$

Выразим K_{z_1} через кинетические моменты относительно подвижных главных осей инерции $Oxyz$ для точки O:

$$K_x=J_x\omega_x;\quad K_y=J_y\omega_y=J_x\omega_y;\quad K_z=J_z\omega_z.$$

Так как кинетический момент $\bar{K}_O$ можно разложить на составляющие по осям подвижной системы координат $\bar{K}_O=K_x\cdot\bar{i}+K_y\cdot\bar{j}+K_z\cdot\bar{k}$, то K_{z_1} можно получить проецированием векторной суммы на ось Oz_1. Имеем

$$K_{z_1}=K_x\cos(z_1,\hat{}\,x)+K_y\cos(z_1,\hat{}\,y)+K_z\cos(z_1,\hat{}\,z)=J_x\omega_x\gamma_1+ +J_x\omega_y\gamma_2+J_z\omega_z\gamma_3.$$

Интеграл сохранения кинетического момента относительно оси Oz_1 принимает форму

$$J_x(\omega_x\gamma_1+\omega_y\gamma_2)+J_z\omega_z\gamma_3=C_3.$$

Получены следующие три первых интеграла динамических уравнений Эйлера:

$$\begin{aligned} &\omega_z=C_1;\\ &J_x(\omega_x^2+\omega_y^2)+J_z\omega_z^2+2Pl\gamma_3=C_2;\\ &J_x(\gamma_1\omega_x+\gamma_2\omega_y)+J_z\gamma_3\omega_z=C_3.\end{aligned}$$

Согласно начальным условиям $\omega_z=\omega_0$, $\omega_x=\omega_y=0$ при $t=0$, из этих первых интегралов получаем следующие уравнения для определения постоянных C_1, C_2, C_3:

$$\omega_0=C_1;\quad J_z\omega_0^2+2Pl\gamma_{30}=C_2;\quad J_z\gamma_{30}\omega_0=C_3.$$

Подставляя эти значения постоянных в выражения для первых интегралов, имеем

$$\omega_z=\omega_0;\tag{37}$$

$$J_x(\omega_x^2+\omega_y^2)=2Pl(\cos\theta_0-\cos\theta);\tag{38}$$

$$J_x(\gamma_1\omega_x+\gamma_2\omega_y)=J_z\omega_0(\cos\theta_0-\cos\theta),\tag{39}$$

так как, согласно (35) и начальным условиям, $\gamma_{30}-\gamma_3=\cos\theta_0-\cos\theta$.

Из кинематических уравнений Эйлера (34) с учетом (35) получаем соотношения

$$\omega_x^2+\omega_y^2=\dot\psi^2\sin^2\theta+\dot\theta^2;\tag{40}$$

$$\gamma_1\omega_x+\gamma_2\omega_y=\dot\psi\sin^2\theta.\tag{41}$$

С учетом (40) и (41) формулы (38) и (39) примут вид

$$J_x(\dot\psi^2\sin^2\theta+\dot\theta^2)=2Pl(\cos\theta_0-\cos\theta);\tag{42}$$

$$J_x\dot\psi\sin^2\theta=J_z\omega_0(\cos\theta_0-\cos\theta).\tag{43}$$

Из последнего уравнения системы (34), приняв $\omega_z=\omega_0$, имеем

$$\omega_0=\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi.\tag{44}$$

Получена система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (42), (43) и (44), интегрированием которых можно определить углы Эйлера ψ, θ, φ в зависимости от времени при заданных начальных условиях. Это сложная для интегрирования система уравнений. Подготовим ее для приближенного интегрирования.

В (42) левая часть положительна; следовательно, должна быть положительна и правая часть, т. е. $\cos\theta_0-\cos\theta>0$. С учетом этого из (43) для $\dot\psi$ имеем

$$\dot\psi=\frac{J_z\omega_0}{J_x\sin^2\theta}(\cos\theta_0-\cos\theta)>0,\tag{45}$$

т. е. прецессионное движение гироскопа с угловой скоростью прецессии $\dot\psi$ происходит все время в одном и том же направлении, так как при $\dot\psi>0$ угол ψ возрастает с течением времени.

Определяя угловую скорость нутации $\dot\theta$ из (42) с использованием (45), получим

$$\dot\theta^2=\frac{2Pl}{J_x}(\cos\theta_0+\cos\theta)-\frac{J_z^2\omega_0^2}{J_x^2\sin^2\theta}(\cos\theta_0-\cos\theta)^2=$$

$$=\frac{2Pl}{J_x}(\cos\theta_0-\cos\theta)\left[1-\frac{J_z^2\omega_0^2}{2PlJx\sin^2\theta}(\cos\theta_0-\cos\theta)\right].\tag{46}$$

Так как левая часть (46) положительна, то и правая часть должна быть положительна. Учитывая, что $\cos\theta_0-\cos\theta>0$, получаем, что выражение в квадратных скобках должно быть тоже положительным, т. е.

$$\frac{J_z^2\omega_0^2}{2PlJ_x\sin^2\theta}(\cos\theta_0-\cos\theta)<1.\tag{47}$$

Для создания предпосылок последующих допущений приближенной теории гироскопа выполним приближенное интегрирование полученных уравнений для углов Эйлера в случае **быстровращающегося** гироскопа, для которого собственный кинетический момент $J_z\omega_0$ — величина достаточно большая по сравнению с наибольшей величиной знаменателя $2PlJ_x$ в (47). Этот случай представляет наибольший практический интерес. Для таких гироскопов разность $\cos\theta_0-\cos\theta$, как это следует из (47), будет величиной малой. При этом будет малой и разность углов $\theta-\theta_0=u$, где u — изменение угла нутации гироскопа. В этом случае приближенно можно принять, отбрасывая малые второго и более высоких порядков,

$$\cos u=1;\quad \sin u=u;$$

$$\cos\theta=\cos(\theta_0+u)=\cos\theta_0-u\sin\theta_0;\quad \sin\theta=\sin\theta_0.$$

Учитывая, что $\dot\theta=d\theta/dt=du/dt$, из (46) получим следующее дифференциальное уравнение для определения u:

$$(du/dt)^2=\alpha^2u(\beta-u),\tag{46'}$$

где введены обозначения для постоянных

$$\alpha^2=J_z^2\omega_0^2/J_x^2;\quad \beta=2PlJ_x\sin\theta_0/(J_z^2\omega_0^2).$$

Из (46′) после извлечения квадратного корня и разделения переменных получим

$$\int_0^u\frac{du}{\sqrt{\alpha^2u(\beta-u)}}=\int_0^t dt.$$

Пределы в интегралах поставлены с использованием начальных условий. Интеграл левой части вычисляется с помощью

подстановки $u=\beta\sin^2\xi$. Выполняя интегрирование, окончательно имеем

$$u=\theta-\theta_0=\beta\sin^2\left(\frac{\alpha t}{2}\right)=\frac{2PlJ_x\sin\theta_0}{J_z^2\omega_0^2}\sin^2\left(\frac{J_z\omega_0}{2J_x}t\right).\tag{48}$$

Подставляя значение θ из (48) в (45) с учетом принятых допущений, получим

$$\dot\psi=\frac{J_z\omega_0}{J_x\sin\theta_0}u.\tag{45'}$$

Отсюда интегрированием находится угол прецессии ψ.

Для угловой скорости собственного вращения из (44) с учетом (45′) и принятых допущений имеем

$$\dot\varphi=\omega_0-\frac{J_z\omega_0\cos\theta_0}{J_x\sin\theta_0}u.\tag{44'}$$

Из этого соотношения квадратурой получается угол φ в зависимости от времени.

Не производя вычисления интегралов, уже можно сделать следующие основные выводы о движении быстровращающегося гироскопа.

1. Модули угловых скоростей прецессии $|\dot\psi|$ и нутации $|\dot\theta|$ малы по сравнению с модулем угловой скорости собственного вращения

2. Если прецессионное движение происходит все время в одном и том же направлении ($\dot\psi>0$), то нутационное движение носит колебательный характер.

Отсюда следует, что если взять на оси гироскопа какую-либо точку A, то ее траектория на поверхности сферы, согласно (48), будет иметь вид, указанный на рис. 142. При $u=0$, как следует из (45′), $\dot\psi=0$, т. е. прецессия на мгновение прекращается. В случае очень больших значений $J_z\omega_0$ наибольшее изменение угла нутации u_{max} будет очень малым и тогда можно принять $\theta=\text{const}=\theta_0$. Если ввести постоянную среднюю угловую скорость прецессии за рассматриваемый промежуток времени, то движение гироскопа будет очень близким к регулярной прецессии, для которой угловые скорости прецессии и собственного вращения постоянны и прецессия происходит вокруг неподвижной оси при постоянном

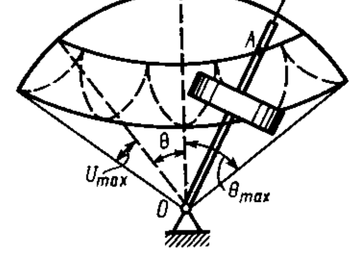

Рис. 142

угле нутации. В действительности движение гироскопа немного отличается от регулярной прецессии. Движение гироскопа, близкое к регулярной прецессии, называют *псевдорегулярной прецессией*.